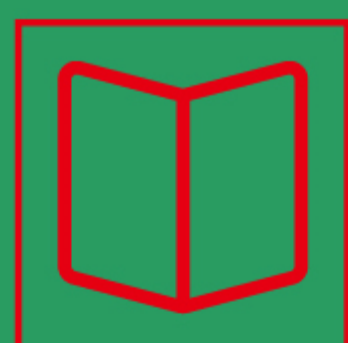
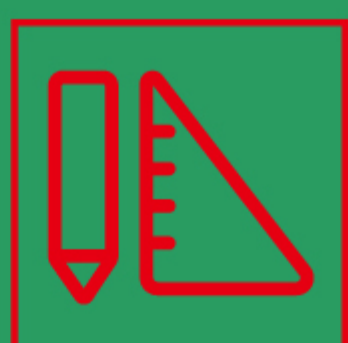
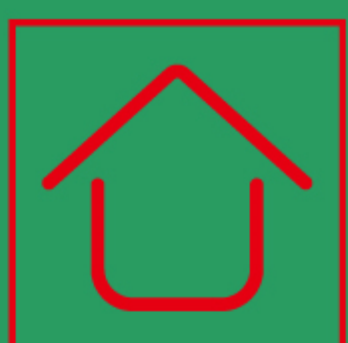




教辅图书



功能学具



学生之家

基础教育行业专研品牌

30⁺年创始人专注教育行业

全品高考

第二轮专题

???

解一元二次不等式实际上就是求出对应的一元二次方程的实数根（如果有实数根）再结合对应的函数的图像确定其大于零或者小于零的区间在含有字母参数的不等式中还要根据参数的不同取值确定方程根的大小以及函数图像的开口方向，从而确定不等式的解集

使 $f(x) > 0$ 的区间为单调递增区间；使 $f(x) < 0$ 的区间为单调递减区间

$f'(x_0) = 0$ ，且 $f''(x_0)$ 在 x_0 附近左负（正）右正（负），则 x_0 为极小（大）值点

常用逻辑用语：原命题与逆命题、否命题与逆否命题互逆
原命题与否命题、逆命题与逆否命题互否
原命题与逆否命题、否命题与逆命题互为逆否，互为逆否的命题等价

偶函数在定义域内关于坐标原点对称的区间上具有相反的单调性、奇函数在定义域内关于坐标原点对称的区间上具有相同的单调性

$y = f(x)$ 的图像平移 ϕ 得 $y = f(x + \phi)$ 的图像
 $\phi > 0$ 向左， $\phi < 0$ 向右

$y = f(x)$ 的图像平移 k 得 $y = f(x) + k$ 的图像， $k > 0$ 向上， $k < 0$ 向下

二元一次不等式 $Ax + By + C > 0$ 的解集是平面直角坐标系中表示直线 $Ax + By + C = 0$ 某一侧所有点组成的平面区域
二元一次不等式组的解集是指各个不等式解集所表示的平面区域的公共部分

把 $y = f(x)$ 图像各点的纵坐标变为原来的 λ 倍得 $y = \lambda f(x)$ 的图像

主编 肖德好

$y = f(x)$ 图像关于点 (a, b) 对称的图像的解析式是
 $y = 2b - f(2a - x)$

数学

听课手册

新高考版

YN



延边教育出版社

CONTENTS

目录

01 高考专题整合

• 思想篇	数学思想方法的应用	001
• 方法篇	选择题的特殊解法	005
• 自习篇	基础知识自主练习	007

高考六大模块题型解法攻略

模块一 三角函数与解三角形、平面向量

微专题 1	三角恒等变换与三角函数的性质和图象	010
品点拨 1	ω 的范围与最值问题	013
点拨 1	与对称性有关的问题	
点拨 2	与单调性有关的问题	
点拨 3	与函数零点有关的问题	
微专题 2	平面向量及其应用	014
微专题 3	解三角形	015
品点拨 2	“爪型”三角形问题	019
点拨 1	角平分线型	
点拨 2	中线型	
点拨 3	定比分点型	
点拨 4	高线型	

模块二 数列

微专题 4	等差数列、等比数列	021
微专题 5	求数列的通项公式	023
微专题 6	数列求和	025
品点拨 3	数列的单调性与最值	029
点拨 1	单调性法求最值	
点拨 2	函数思想的应用	
品点拨 4	重构数列问题	030
点拨 1	两个数列的公共项、合并项问题	
点拨 2	数列的增减项问题	

模块三 立体几何

微专题 7	简单几何体的结构特征、表面积、体积	032
微专题 8	空间直线、平面的位置关系	033
微专题 9	空间角度与距离的计算	035
品点拨 5	立体几何的动态问题	038
点拨 1	线、面位置关系和轨迹问题	
点拨 2	距离、角度、体积和面积等问题	
点拨 3	翻折问题	

模块四 概率与统计

微专题 10 排列组合与二项式定理 039

微专题 11 概率 040

微专题 12 离散型随机变量的分布列及数字特征 043

品点拨 6 概率与其他知识综合应用问题 048

 点拨 1 二项分布概率的最值

 点拨 2 超几何分布概率的最值

 点拨 3 概率与数列的综合应用

 点拨 4 概率与导数的综合应用

微专题 13 统计与成对数据的统计分析 050

模块五 解析几何

微专题 14 直线与圆 057

微专题 15 圆锥曲线的定义与几何性质 059

微专题 16 直线与圆锥曲线的位置关系 061

微专题 17 圆锥曲线的综合问题 063

品点拨 7 圆锥曲线二级结论及其应用 067

 点拨 1 焦点三角形问题

 点拨 2 焦点弦

 点拨 3 抛物线的焦点弦常用结论

模块六 函数与导数

微专题 18 函数的图象与性质 069

微专题 19 应用导数求解函数问题 071

微专题 20 零点问题 072

微专题 21 利用导数求解不等式问题 075

品点拨 8 同构函数问题 079

 点拨 1 构造抽象函数比较大小

 点拨 2 含双变量的构造函数问题

 点拨 3 利用指对运算构造同构函数

品点拨 9 极值点偏移问题 081

 点拨 1 不含参数的极值点偏移问题

 点拨 2 含参数的极值点偏移问题

 点拨 3 极值点偏移问题一题多解

附录 1 高中数学考前必记公式 084

附录 2 关注教材中的素材挖掘拓展 088

参考答案（另附分册） / 146

02 特色专项（另附分册）

■ 考卷 I 小题·标准练

“8+3+3” 73分练（小题1~小题12）

■ 考卷 II 解答·标准练

“15~17题” 43分练（解答1~解答12）

“18题、19题” 34分练（解答13~解答18）

思想一 函数与方程思想

函数思想是指用函数的观点与方法来分析研究数学中的数量关系,通过建立函数关系或构造函数,运用函数图象和性质分析、转化和解决问题的一种思维策略.如求数列中的项或最值、求不等式中的参数、求解析几何中距离或面积的最值等相关的非函数问题,往往都可利用函数思想转化为函数问题.

方程思想是分析数学问题中变量间的等量关系,建立方程或方程组,或者构造函数,通过解方程或方程组,或运用方程的性质去分析、转化和解决问题的一种思维策略.如变量的取值范围、直线与圆锥曲线的位置关系、数列中的基本量、二项式系数等问题都可利用方程思想.

函数思想与方程思想密切相关:方程 $f(x)=0$ 的解就是函数 $y=f(x)$ 的图象与 x 轴的交点的横坐标;函数 $y=f(x)$ 也可以看作二元方程 $f(x)-y=0$,通过方程进行研究;方程 $f(x)=a$ 有解,当且仅当 a 属于函数 $f(x)$ 的值域.函数思想重在对问题进行动态的研究,方程思想则是在动中求静,研究“运动”中的等量关系.

典例精析

1. 已知圆锥的母线长为 4,则当圆锥的体积最大时,其表面积为 ()

- A. $\frac{16\sqrt{2}}{3}\pi+8\pi$ B. 16π
C. $\frac{32}{3}\pi+\frac{16\sqrt{6}}{3}\pi$ D. $8\sqrt{2}\pi+16\pi$

[解法关键]

根据题意,设圆锥的底面半径为 $r(0<r<4)$,高为 h ,

求得圆锥的体积 $V=\frac{1}{3}\pi\sqrt{16r^4-r^6}$,令 $f(r)=16r^4-r^6(0<r<4)$,则 $f'(r)=64r^3-6r^5$,利用函数 $f(r)$ 的单调性,计算出圆锥的体积最大时 r 的值,再结合圆锥的表面积公式求解.

2. [2025·天津红桥区模拟] 设 $a\in\mathbf{R}$,函数

$$f(x)=\begin{cases}\cos(2\pi x-2\pi a), & x<a, \\ x^2-2(a+1)x+a^2+5, & x\geq a,\end{cases} \quad \text{若函数}$$

$f(x)$ 在区间 $(0,+\infty)$ 上恰有 6 个零点,则 a 的取值范围是 ()

- A. $(2,\frac{9}{4}]\cup(\frac{5}{2},\frac{11}{4}]$
B. $(\frac{7}{4},2]\cup(\frac{5}{2},\frac{11}{4}]$
C. $(2,\frac{9}{4}]\cup[\frac{11}{4},3)$
D. $(\frac{7}{4},2)\cup[\frac{11}{4},3)$

[解法关键]

将函数问题转化为方程的根的问题,分别讨论三角函数有 4,5,6 个零点时三角函数中参数 a 的范围,以及二次函数对应应有 2,1,0 个零点时二次函数中参数 a 的范围,分别取交集,再将最后结果取并集.

自测题

1. [2025·江苏南通模拟] 已知点 P 在抛物线 $x^2=-5y$ 上,且 $A(0,-3)$,则 $|PA|$ 的最小值为 ()

- A. $\frac{1}{4}$ B. $\frac{1}{2}$ C. $\frac{35}{4}$ D. $\frac{\sqrt{35}}{2}$

2. (多选题) [2025·辽宁鞍山三模] 已知函数 $f(x)=\sin(\frac{\pi}{2}-x)+\sin^2x$,则下列说法正确的是 ()

- A. 函数 $f(x)$ 的最大值为 2
B. 函数 $f(x)$ 的最小值为 -1
C. 函数 $f(x)$ 在 $(\frac{\pi}{3},\pi)$ 上单调递减
D. 函数 $f(x)$ 在 $(-\frac{\pi}{3},\pi)$ 内有且只有一个零点

3. [2025·湖北宜昌二模] 记 S_n 为等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和,若 $a_3+a_4=7$, $S_{10}=95$,则 $a_5=$ _____.

4. [2025·湖北黄冈模拟] 函数 $f(x)=\cos(\sin x)-1$ 在区间 $[0,a]$ 上有两个零点,则实数 a 的取值范围为 _____.

思想二 数形结合思想

数形结合是根据数量与图形之间的对应关系,通过数与形的相互转化来解决数学问题的一种重要思想方法.数形结合思想体现了数与形之间的转化,它包含“以形助数”和“以数解形”两个方面.数形结合的实质是把抽象的数学语言与直观的图形语言结合起来,即将代数问题几何化、几何问题代数化.

数形结合思想常用来解决函数零点、方程根与不等式问题,参数范围问题,以立体几何为模型的代数问题,解析几何中的斜率、截距、距离等问题.

典例精析

1. [2023·全国乙卷] 已知 $\odot O$ 的半径为1,直线 PA 与 $\odot O$ 相切于点 A ,直线 PB 与 $\odot O$ 交于 B, C 两点, D 为 BC 的中点,若 $|PO|=\sqrt{2}$,则 $\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PD}$ 的最大值为 ()

- A. $\frac{1+\sqrt{2}}{2}$ B. $\frac{1+2\sqrt{2}}{2}$
C. $1+\sqrt{2}$ D. $2+\sqrt{2}$

[解法关键]

结合图形判断 A, D 两点相对于直线 PO 的位置关系,并判断 $\angle OPC$ 的范围,进而求解.

2. (多选题)[2025·郑州模拟] 已知函数 $f(x)=|\ln(x-1)|-kx+k-2$,则下列结论正确的是 ()

- A. 存在负数 k ,使得 $f(x)$ 没有零点
B. 若 $f(x)$ 恰有2个零点,则 $-e < k \leq 0$
C. 若 $f(x)$ 恰有1个零点,则 $k=-e$
D. 当 $0 < k < e^{-3}$ 时, $f(x)$ 恰有3个零点

[解法关键]

将原函数的零点问题转化为曲线 $y=|\ln(x-1)|$ 与直线 $y=k(x-1)+2$ 的交点个数问题,作出曲线 $y=|\ln(x-1)|$,讨论恒过定点 $(1,2)$ 的直线 $y=k(x-1)+2$ 的斜率 k 取不同值时,直线与曲线的交点个数情况,进而求解.

3. 已知正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的棱长为2, M 为棱 B_1C_1 的中点, N 为底面正方形 $ABCD$ 内的一个动点,且直线 MN 与底面 $ABCD$ 所成的角为 $\frac{\pi}{3}$,则动点 N 的轨迹的长度为_____.

[解法关键]

过平面外一点与平面所成的角为定值的直线与平面的交点的轨迹为圆(或圆的一部分),结合已知条件可确定动点 N 的轨迹是以 G (G 为 BC 的中点)为圆心,

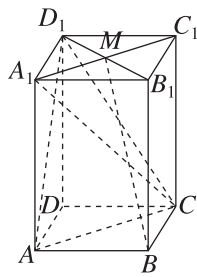
$\frac{2\sqrt{3}}{3}$ 为半径的一段圆弧.在正方形 $ABCD$ 中画出圆弧,即可由半径与正方形的边长确定圆弧所对的圆心角,进而求得弧长.

自测题

1. [2025·广西柳州模拟] 已知函数 $f(x)=\begin{cases} x^2+2x-3, & x \leq 0, \\ -2+\ln x, & x > 0, \end{cases}$ 若方程 $f(x)=k$ 的实数解恰有两个,则实数 k 的取值范围是 ()

- A. $k \leq -4$
B. $-4 < k < -3$
C. $k = -4$ 或 $k > -3$
D. $k = -4$ 或 $k \geq -3$

2. (多选题)[2025·河南信阳模拟] 如图,在直四棱柱 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中,底面 $ABCD$ 为平行四边形, $AB=AD=2, AA_1=3, \angle ABC=\frac{2\pi}{3}$, M 为 A_1C_1 与 B_1D_1 的交点.若 P 为线段 BM 上一动点,则下列说法正确的是 ()



- A. $A_1C=\sqrt{21}$
B. 三棱锥 $A-PCD_1$ 的体积为定值
C. $\angle APC$ 的取值范围为 $[\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}]$
D. 以 D 为球心, $\sqrt{7}$ 为半径的球与侧面 BCC_1B_1 的交线长为 $\frac{2\pi}{3}$

3. [2025·重庆江北区模拟] 已知函数 $f(x)=e^x(2x-1)-ax+a$ 有两个零点,则实数 a 的取值范围是_____.

思想三 分类讨论思想

分类讨论思想就是将一个复杂的数学问题分解成若干个简单的基础问题,通过对基础问题的解答解决原问题的思维策略,实质上就是“化整为零,各个击破,再积零为整”的策略.其研究的基本方向是“分”,但分类解决问题之后,还必须把它们整合在一起.使用分类讨论思想应明白这样几点:一是引起分类讨论的原因;二是分类讨论的原则,不重不漏,分类标准统一;三是分类讨论的步骤.

常见的分类讨论问题有以下几种:(1)由概念引起的分类讨论;(2)由性质、定理、公式的限制条件引起的分类讨论;(3)由数学运算引起的分类讨论;(4)图形的不确定性引起的分类讨论;(5)由参数的变化引起的分类讨论.

典例精析

1. [2025·陕西咸阳模拟] 双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{12} = 1$

($a > 0$) 的两个焦点是 F_1 与 F_2 , 焦距为 8, M 是双曲线上的一点, 若 $|MF_1| = 5$, 则 $|MF_2| =$ ()

- A. 9 B. 9 或 1
C. 1 D. 6

【解法关键】

根据双曲线的定义求得 $|MF_2|$ 之后, 还要对不同的取值情况分别讨论是否符合题意.

2. 已知函数 $f(x) = 5 - \cos 2ax - 2\sin ax$ 在区间 $[-1, 2]$ 上的最小值为 $\frac{7}{2}$, 则实数 a 的取值范围为 ()

- A. $(-\infty, -\frac{\pi}{6}] \cup [\frac{\pi}{12}, +\infty)$
B. $(-\infty, -\frac{\pi}{12}] \cup [\frac{\pi}{6}, +\infty)$
C. $[-\frac{\pi}{6}, 0) \cup (0, \frac{\pi}{12}]$
D. $[-\frac{\pi}{6}, 0) \cup [\frac{\pi}{12}, +\infty)$

【解法关键】

根据二倍角公式将 $f(x)$ 化简再整理, 从而问题可转化为关于 x 的方程 $\sin ax = \frac{1}{2}$ 在区间 $[-1, 2]$ 上有解, 再分 $a > 0$, $a = 0$ 和 $a < 0$ 三种情况讨论即可得出答案.

3. 已知直线 $AB \subset$ 平面 α , $AC \perp \alpha$, $BD \perp AB$, BD 与平面 α 成 30° 角, $AB = m$, $AC = BD = n$, 则 C 与 D 之间的距离是 ()

- A. $\sqrt{m^2 + n^2}$
B. $\sqrt{m^2 + 3n^2}$

C. $\sqrt{m^2 + n^2}$ 或 $\sqrt{m^2 + 2n^2}$

D. $\sqrt{m^2 + n^2}$ 或 $\sqrt{m^2 + 3n^2}$

【解法关键】

当已知直线与平面所成的角时, 直线的方向向量与平面的法向量的夹角通常存在两种情况, 分别求解每种情况下 C 与 D 之间的距离即可.

自测题

1. [2025·山西运城模拟] 若函数 $f(x) = (x - 2)e^x - \frac{a}{2}x^2 + ax$ ($a \in \mathbf{R}$) 在 $x = 1$ 处取得极小值, 则实数 a 的取值范围是 ()

- A. $(-\infty, 0)$ B. $(0, e)$
C. $(-\infty, e)$ D. $(e, +\infty)$

2. [2025·济南模拟] 已知函数 $f(x) = \sin(\omega x + \frac{\pi}{3})$ ($\omega > 0$) 在区间 $(\frac{\pi}{2}, \pi)$ 上至少有两个零点, 则实数 ω 的取值范围是 ()

- A. $(\frac{8}{3}, +\infty)$
B. $[\frac{8}{3}, +\infty)$
C. $(\frac{8}{3}, \frac{10}{3}) \cup (\frac{11}{3}, +\infty)$
D. $[\frac{8}{3}, \frac{10}{3}] \cup [\frac{11}{3}, +\infty)$

3. 设椭圆 $C_1: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{2} = 1$ ($a > 0$ 且 $a \neq \sqrt{2}$), 双曲线 $C_2: \frac{x^2}{6} - \frac{y^2}{2} = 1$ 的离心率分别为 e_1, e_2 . 若 $e_2 = 2e_1$, 则 a 的值为_____.

思想四 转化与化归思想

转化与化归思想是指在研究数学问题时,采用某种方法将问题转化,使问题得以解决的一种思维策略,其核心是把复杂的问题化归为容易求解的问题,将较难的问题化归为较简单的问题,将未能解决的问题化归为已经解决的问题,简单说就是化“生”为“熟”.

常见的转化与化归思想的应用具体表现在:将抽象函数问题转化为具体函数问题,立体几何和解析几何中一般性点或图形问题转化为特殊点或特殊图形问题,“至少”或“是否存在”等正向思维受阻问题转化为逆向思维容易求解的问题,空间与平面的转化,相等问题与不等问题的转化等.

典例精析

1. [2025·江西景德镇模拟] 若曲线 $C: y = \sqrt{-x^2 + 4x - 3}$ 上存在两点到直线 $l: x - \sqrt{3}y - m = 0 (m > 0)$ 的距离为 3, 则 m 的取值范围为 ()

A. $[7, 9)$ B. $(6, 7]$
C. $(5, 6)$ D. $(5, 9)$

[解法关键]

将圆弧上某点到直线的距离先转化为圆心到直线的距离,判断直线的大致位置,再转化为平行直线间的距离,进而求解.

2. 在平面直角坐标系 xOy 中,已知圆 $C: (x - 2\sqrt{3})^2 + (y - 2)^2 = 1$ 和两点 $A(-m, 0), B(m, 0) (m > 0)$. 若圆 C 上存在点 P ,使得 $\angle APB = 90^\circ$, 则 m 的最大值为 ()
- A. 4 B. 5
C. 6 D. 7

[解法关键]

根据题意可得 AB 为直径的圆与圆 C 交于点 P ,从而可得 $|PO| = m$,将圆上的点到原点的距离的最大值转化为圆心到原点的距离加上半径即可求解.

3. [2025·山西大同模拟] 已知实数 a, b, c, d 满足 $3a - 4b + 3 = 0, 3c - 4d - 7 = 0$, 则 $(a - c)^2 + (b - d)^2$ 的最小值为 ()
- A. 1 B. 2
C. 3 D. 4

[解法关键]

点 (a, b) 和点 (c, d) 分别在平行的两条直线上, 则 $(a - c)^2 + (b - d)^2$ 的最小值即为两条平行直线间距离的平方.

4. 在数列 $\{a_n\}$ 中, $a_1 = 4, a_{n+1} = 3a_n - 2$, 若对任意的正整数 $n, ka_n \leq 9^n$ 恒成立, 则实数 k 的最大值为 _____.

[解法关键]

数列具有函数的某些特性,故在解决有关数列的一些问题,如数列最大项、数列不等式等问题时,可借助函数求解. 本题中求出数列 $\{a_n\}$ 的通项公式后,将数列不等式转化为

$$k \leq \frac{9^n}{3^n + 1} = \frac{1}{\frac{1}{3^{2n}} + \frac{1}{3^n}} \quad (n \in \mathbf{N}^*), \text{再令}$$

$$t(n) = \frac{1}{3^{2n}} + \frac{1}{3^n} = \left(\frac{1}{3^n} + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}, \text{通过讨论函数 } t(n) \text{ 的性质求得其最大值,从而得到 } k \text{ 的最大值.}$$

自测题

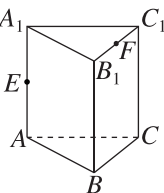
1. 已知 $P(m, n)$ 为圆 $C: (x - 1)^2 + (y - 1)^2 = 1$ 上任意一点, 则 $\frac{m+n}{m+1}$ 的最大值为 ()

A. $\frac{\sqrt{3}}{3}$ B. $-\frac{\sqrt{3}}{3}$
C. $1 + \frac{\sqrt{3}}{3}$ D. $1 - \frac{\sqrt{3}}{3}$

2. 若 $a_0 x^{2020} + a_1 x^{2019} (1 - x) + a_2 x^{2018} (1 - x)^2 + \cdots + a_{2020} (1 - x)^{2020} = 1$, 则 $a_0 + a_1 + \cdots + a_{2020} =$ ()
- A. 1 B. 0
C. 2^{2020} D. 2^{2021}

3. [2025·吉林长春三模] 已知复数 z_1 满足 $|z_1 - 1| = |z_1 - i|$, 复数 z_2 满足 $|z_2 - 4| = \sqrt{2}$, 则 $|z_1 - z_2|$ 的最小值为 _____.

4. 如图, 在直三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中, $AB = BC = \sqrt{2}, BB_1 = 2, \angle ABC = 90^\circ$, E, F 分别为 AA_1, C_1B_1 的中点, 则沿棱柱的表面从 E 到 F 的最短路径的长度为 _____.



方法一 特例法

在解决选择题时,可以取一个(或一些)特殊数值(或特殊位置、特殊函数、特殊点、特殊方程、特殊数列、特殊图形等)来确定其结果,这种方法称为特例法.特例法只需对特殊数值、特殊情形进行检验,省去了推理论证、烦琐演算的过程,提高了解题的速度.特例法是考试中解答选择题时经常用到的一种方法,应用得当可以起到“四两拨千斤”的功效.

(1)使用前提:满足当一般性结论成立时,对符合条件的特殊化情况也一定成立.

(2)使用技巧:找到满足条件的合适的特殊化例子,或举反例排除,有时甚至需要两次或两次以上特殊化例子才可以确定结论.

(3)常见问题:求范围、比较大小、含字母求值、恒成立问题、任意性问题等.

典例精析

1. [2024·新课标Ⅱ卷] 已知命题 $p: \forall x \in \mathbf{R}, |x+1| > 1$, 命题 $q: \exists x > 0, x^3 = x$, 则 ()

- A. p 和 q 都是真命题
B. $\neg p$ 和 q 都是真命题
C. p 和 $\neg q$ 都是真命题
D. $\neg p$ 和 $\neg q$ 都是真命题

【解法关键】

对于全称量词命题 p , 举出一反例 ($x = -\frac{1}{2}$) 判断原命题为假命题, 对于存在量词命题 q , 举出一例 ($x = 1$) 判断原命题为真命题.

2. 若 $a > \frac{1}{2}$ 且 $ab = \frac{1}{2}$, 则下列不等式成立的是 ()

- A. $2a + \frac{1}{b} < \log_2(2a+b) < \frac{b}{4^a}$
B. $\log_2(2a+b) < 2a + \frac{1}{b} < \frac{b}{4^a}$
C. $\frac{b}{4^a} < \log_2(2a+b) < 2a + \frac{1}{b}$
D. $2a + \frac{1}{b} < \frac{b}{4^a} < \log_2(2a+b)$

【解法关键】

根据 $a > \frac{1}{2}$ 及 $ab = \frac{1}{2}$ 对 a, b 分别进行赋值, 从而可得正确选项.

3. [2025·全国一卷] 已知 $2 + \log_2 x = 3 + \log_3 y = 5 + \log_5 z$, 则 x, y, z 的大小关系不可能是 ()

- A. $x > y > z$ B. $x > z > y$
C. $y > x > z$ D. $y > z > x$

【解法关键】

由题得 $\log_2 x - 1 = \log_3 y = \log_5 z + 2 = k$, 即 $x = 2^{k+1}$, $y = 3^k$, $z = 5^{k-2}$, 对 k 进行不同赋值, 得到特定情况下 x, y, z 的大小关系即可排除错误选项, 从而得到正确选项.

自测题

1. [2025·辽宁锦州模拟] 在三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中, 侧棱 A_1A 和 B_1B 上各有一动点 P, Q , 满足 $A_1P = BQ$, 过 P, Q, C 三点的截面把棱柱分成两部分, 则两部分的体积之比为 ()

- A. 3 : 1 B. 2 : 1
C. 4 : 1 D. $\sqrt{3} : 1$

2. [2025·山东青岛模拟] 在 $\triangle ABC$ 中, 内角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c , 若 $a + c = 3b$, 则 $\tan \frac{A}{2} \tan \frac{C}{2}$ 的值为 ()

- A. $\frac{1}{5}$ B. $\frac{1}{4}$ C. $\frac{1}{2}$ D. $\frac{2}{3}$

3. 在等差数列 $\{a_n\}$ 中, 若 $a_2 + a_4 + a_6 + a_8 + a_{10} = 80$, 则 $a_7 - \frac{1}{2}a_8$ 的值为 ()

- A. 7 B. 8
C. 9 D. 10

方法二 验证法

验证法是将选项或特殊值代入题干逐一去验证是否满足题目条件,然后选择符合题目条件的选项的一种方法.在运用验证法解题时,若能根据题意确定代入顺序,则能提高解题速度.

(1)使用前提:各选项可分别作为条件.

(2)使用技巧:可以结合特例法、排除法等先否定一些明显错误的选项,再选择直觉认为最有可能的选项进行验证,这样可以快速获得答案.

(3)常见问题:题干信息不全、选项是数值或范围、正面求解或计算烦琐的问题等.

典例精析

1. [2025·广州模拟] 函数 $f(x) = \log_2(4^x + 16^x) - 3x$ 的图象 ()

- A. 关于原点对称
B. 关于 y 轴对称
C. 关于直线 $x=2$ 对称
D. 关于点 $(0,1)$ 对称

[解法关键]

此题中 $f(x)$ 的定义域为 $\mathbf{R}$,则可对 x 分别赋值 1, -1 和 3,并计算 $f(1)$, $f(-1)$ 和 $f(3)$ 的值,对选项进行逐一验证即可.

2. [2025·江西新余模拟] 已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $3^{a_{n+1}} - 3^{a_n} = 2^n$,且 $a_1 = 1$,则数列 $\{a_n\}$ 的通项公式为 ()

- A. $a_n = 2^n - 1$
B. $a_n = \log_3 2^{n-1} + 1$
C. $a_n = \log_3(2^n + 1)$
D. $a_n = \log_3(2^{n+1} - 1)$

[解法关键]

根据选项中的通项公式分别验证 $3^{a_2} - 3^{a_1} = 2^1$ 是否成立即可.

3. 已知 P 是边长为 2 的正六边形 $ABCDEF$ 内(不包括边界)的一点,则 $\overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{AB}$ 的取值范围是 ()

- A. $(-2,6)$ B. $(-6,2)$
C. $(-2,4)$ D. $(-4,6)$

[解法关键]

当点 P 与点 C 重合时, $\overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{AB} = 6$;当点 P 与点 F 重合时, $\overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{AB} = -2$,进而求解.

自测题

1. 已知函数 $f(x) = \sin(\omega x + \frac{\pi}{6})$ (其中 $\omega > 0$) 图象的一条对称轴方程为 $x = \frac{\pi}{12}$,则 ω 的最小值为 ()

- A. 2 B. 4
C. 10 D. 16

2. 在数列 $\{a_n\}$ 中,若 $\sqrt{a_{n+1}} = \sqrt{a_n} + \sqrt{2}$, $a_1 = 8$,则数列 $\{a_n\}$ 的通项公式为 ()

- A. $a_n = 2(n+1)^2$ B. $a_n = 4(n+1)$
C. $a_n = 8n^2$ D. $a_n = 4n(n+1)$

3. 已知 $a \in \mathbf{R}$,设函数 $f(x) = \begin{cases} x^2 - 2ax + 2a, & x \leq 1, \\ x - a \ln x, & x > 1, \end{cases}$

若关于 x 的不等式 $f(x) \geq 0$ 在 $\mathbf{R}$ 上恒成立,则 a 的取值范围为 ()

- A. $[0,1]$ B. $[0,2]$
C. $[0,e]$ D. $[1,e]$

4. 已知函数 $f(x) = -x^3 - 7x + \sin x$,若 $f(a^2) + f(a-2) > 0$,则实数 a 的取值范围是 ()

- A. $(-\infty, 1)$ B. $(-\infty, 3)$
C. $(-1, 2)$ D. $(-2, 1)$

自习一 集合与常用逻辑用语

- [2025·全国一卷] 已知集合 $U = \{x | x \text{ 是小于 } 9 \text{ 的正整数}\}$, $A = \{1, 3, 5\}$, 则 $\complement_U A$ 中元素个数为 ()
A. 2 B. 3 C. 5 D. 8
- 已知命题 $p: \exists x > 1, x^2 - 1 > 0$, 则 $\neg p$ 是 ()
A. $\forall x \leq 1, x^2 - 1 \leq 0$
B. $\forall x > 1, x^2 - 1 \leq 0$
C. $\exists x \leq 1, x^2 - 1 \leq 0$
D. $\exists x > 1, x^2 - 1 \leq 0$
- [2025·河北沧州模拟] 已知集合 $A = \{-2, 1, 4\}$, 集合 $B = \{1, a^2\}$, 若 $A \cap B = B$, 则实数 $a =$ ()
A. 2 B. -2
C. ± 2 D. 0
- [2025·甘肃白银二模] 已知全集 $U = \mathbf{R}$, 集合 $A = \{x | |x - 1| \geq 2\}$, $B = \{x | x^2 - 4x < 0\}$, 则图中阴影部分表示的集合为 ()
A. $\{x | -1 \leq x < 0\}$ B. $\{x | 3 \leq x < 4\}$
C. $\{x | 0 < x \leq 3\}$ D. $\{x | x \geq 4\}$
- 集合 $M = \{x | x = 5k - 2, k \in \mathbf{Z}\}$, $P = \{x | x = 5n + 3, n \in \mathbf{Z}\}$, $S = \{x | x = 10m + 3, m \in \mathbf{Z}\}$ 的关系是 ()
A. $S \subseteq P \subseteq M$
B. $S = P \subseteq M$
C. $S \subseteq P = M$
D. $P = M \subseteq S$
- (多选题) [2025·河北邢台三模] 已知集合 $M = \{x | \ln(x^2 - x - 1) = 0\}$, $N = \{x | x \leq a\}$, 则下列结论正确的有 ()
A. 集合 M 的真子集个数是 3
B. 若 $M \cap N \neq \emptyset$, $M \cap N \neq M$, 则 $-1 \leq a \leq 2$
C. 若 $M \subseteq N$, 则 a 的最小值为 2
D. 若 $M \subseteq (\complement_{\mathbf{R}} N)$, 则 a 的最大值为 -1
- 已知 $p: |3 - x| \leq 4$, $q: x^2 - 4x + 4 - 9m^2 \leq 0$ ($m > 0$), 若 q 是 p 的充分不必要条件, 则实数 m 的取值范围是_____.
- 不等式 $\frac{x-3}{x+a} \geq 1$ 的解集为 M , 若 $-2 \notin M$, 则实数 a 的取值范围为_____.

自习二 不等式

- [2025·湖南永州模拟] 已知集合 $A = \left\{x \left| \frac{4}{x+2} \geq 1 \right.\right\}$, $B = \{x | x^2 - 3x < 0\}$, 则 $A \cup B =$ ()
A. $\{x | x \leq 2 \text{ 或 } x \geq 3\}$
B. $\{x | -2 < x < 3\}$
C. $\{x | 0 < x \leq 2\}$
D. $\{x | x \leq -2 \text{ 或 } x \geq 3\}$
- 已知关于 x 的不等式 $ax^2 - bx + 1 > 0$ 的解集为 $(-\infty, \frac{3}{m}) \cup (m, +\infty)$, 其中 $m > 0$, 则 $b + \frac{2}{m}$ 的最小值为 ()
A. 4 B. $2\sqrt{2}$
C. 2 D. 1
- 已知 $-3 < x < 0$, 则 $y = x\sqrt{9 - x^2}$ 的最小值为 ()
A. $-\frac{9}{2}$ B. $\frac{9}{2}$
C. $-\frac{3}{2}$ D. 不存在
- 若 $-5 < x < -1$, 则函数 $f(x) = \frac{x^2 + 2x + 2}{2x + 2}$ 有 ()
A. 最小值 1 B. 最大值 1
C. 最小值 -1 D. 最大值 -1

5. [2025·南京模拟] 下列说法正确的是 ()

- A. 函数 $y=x+\frac{1}{x}$ 的最小值是 2
- B. 函数 $f(x)=\cos x+\frac{4}{\cos x}, x\in(0, \frac{\pi}{2})$ 的最小值为 4
- C. “ $x>0$ 且 $y>0$ ”是“ $\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\geq 2$ ”的充分不必要条件
- D. 不等式 $a^2+b^2\geq 2ab$ 与 $\frac{a+b}{2}\geq \sqrt{ab}$ 有相同的成立条件

6. 已知正数 a, b, c 满足 $b^2=ac$, 则 $\frac{a+c}{b}+\frac{b}{a+c}$ 的最小值为 ()

- A. 1 B. $\frac{3}{2}$
- C. 2 D. $\frac{5}{2}$

7. [2025·重庆渝北区模拟] 若 $a>b>1$, 且 $a+3b=5$, 则 $\frac{1}{a-b}+\frac{4}{b-1}$ 的最小值为_____.

8. [2025·成都三模] 若存在 $x_0\in(1, +\infty)$, 使得 $\frac{1}{x_0-1}\leq m-x_0$, 则实数 m 的取值范围为_____.

自习三 复数的四则运算与几何意义

1. [2025·全国一卷] $(1+5i)i$ 的虚部为 ()

- A. -1 B. 0
- C. 1 D. 6

2. [2025·全国二卷] 已知 $z=1+i$, 则 $\frac{1}{z-1}=$ ()

- A. -i B. i
- C. -1 D. 1

3. [2024·新课标I卷] 若 $\frac{z}{z-1}=1+i$, 则 $z=$ ()

- A. $-1-i$ B. $-1+i$
- C. $1-i$ D. $1+i$

4. [2025·江苏连云港模拟] 已知 $z_1=1+2i, z_2=3-4i$, 若 $\frac{1}{z}=\frac{1}{z_1}+\frac{1}{z_2}$, 则 $z=$ ()

- A. $4-3i$ B. $2-\frac{3}{2}i$
- C. $2+\frac{3}{2}i$ D. $4+3i$

5. [2025·兰州模拟] 已知复数 $z=x+yi (x, y\in\mathbf{R})$, 且 $|z-4+2i|=2$, 则 $\frac{2y-4}{x+2}$ 的取值范围为 ()

- A. $[\frac{3-\sqrt{3}}{2}, \frac{3+\sqrt{3}}{2}]$
- B. $[\frac{-3-\sqrt{3}}{4}, \frac{-3+\sqrt{3}}{4}]$

C. $[\frac{-3-\sqrt{3}}{2}, \frac{-3+\sqrt{3}}{2}]$

D. $(-\infty, \frac{-3-\sqrt{3}}{2}] \cup [\frac{-3+\sqrt{3}}{2}, +\infty)$

6. (多选题)[2025·河北衡水三模] 已知 z_1, z_2 为复数, 下列说法正确的是 ()

- A. 若 $z_1^2\in\mathbf{R}$, 则 $z_1\in\mathbf{R}$
- B. 若 $|z|=1$, 则 $|z-2|$ 的最小值为 1
- C. 若 $z_1=\bar{z}_2$, 则 $z_1z_2\in\mathbf{R}$
- D. 若 $z_1^2+z_2^2=0$, 则 $z_1=z_2=0$

7. (多选题)已知复数 $z_0=1-i$ 和 z , 则下列说法正确的是 ()

- A. 若 z 满足 $|z-z_0|=z_0+\bar{z}_0$, 则 z 在复平面内对应的点的轨迹是圆
- B. 若 z 满足 $|z-z_0|+|z-\bar{z}_0|=3$, 则 z 在复平面内对应的点的轨迹是椭圆
- C. 若 z 满足 $|z-z_0|-|z-\bar{z}_0|=2$, 则 z 在复平面内对应的点的轨迹是双曲线
- D. 若 z 满足 $|z+z_0+\bar{z}_0|=|z-\bar{z}_0|$, 则 z 在复平面内对应的点的轨迹是抛物线

自习四 平面向量的线性运算

1. [2025·海南三亚三模] 已知四边形 $ABCD$ 为平行四边形, E 为 CD 的中点, 记 $\overrightarrow{AB} = \mathbf{a}$, $\overrightarrow{AD} = \mathbf{b}$, 则 $\overrightarrow{BE} =$ ()
 A. $\mathbf{a} + \frac{1}{2}\mathbf{b}$ B. $\mathbf{a} - \frac{1}{2}\mathbf{b}$
 C. $-\frac{1}{2}\mathbf{a} + \mathbf{b}$ D. $-\frac{1}{2}\mathbf{a} - \mathbf{b}$
2. 已知 $\mathbf{e}_1$ 与 $\mathbf{e}_2$ 是两个不共线的向量, 且向量 $x\mathbf{e}_1 + 3\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_1 + y\mathbf{e}_2$ 同向, 则 $x + 2y$ 的最小值为 ()
 A. 12 B. 6
 C. $2\sqrt{6}$ D. $\sqrt{6}$
3. 在 $\triangle ABC$ 中, D, E 分别为边 AB, BC 上的点, 且 $AD = DB, BE = 2EC$, 若 $\overrightarrow{DE} = m\overrightarrow{AB} + n\overrightarrow{AC}$, 则 $\frac{m}{n} =$ ()
 A. $-\frac{1}{4}$ B. $-\frac{5}{8}$
 C. $\frac{1}{8}$ D. $\frac{5}{4}$
4. 在 $\triangle ABC$ 所在的平面内有一点 P , 满足 $2\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{PB}$, 则 $\triangle PAB$ 与 $\triangle ABC$ 的面积之比是 ()
 A. $\frac{1}{3}$ B. $\frac{2}{3}$
 C. $\frac{3}{4}$ D. $\frac{1}{2}$
5. 在 $\triangle ABC$ 中, $AB = 3, AC = 2, \overrightarrow{AD} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{3}{4}\overrightarrow{AC}$, 则直线 AD 一定经过 $\triangle ABC$ 的 ()
 A. 垂心 B. 外心
 C. 重心 D. 内心
6. (多选题) 已知等边三角形 ABC 的边长为 2, $\overrightarrow{BD} = \lambda\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{CE} = \lambda\overrightarrow{CA} (0 < \lambda < 1)$, AD 交 BE 于点 M , 则下列说法正确的是 ()
 A. 若 $\lambda = \frac{1}{3}$, 则 $\overrightarrow{AD} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AC} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$
 B. 若 $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = \mathbf{0}$, 则 $\lambda = \frac{1}{2}$
 C. 若 $\lambda = \frac{2}{3}$, 则 $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{BE} = -\frac{7}{9}$
 D. 若 $\lambda = \frac{2}{3}$, 则 M 为 AD 的中点
7. [2025·沈阳模拟] 在 $\triangle ABC$ 中, 已知 $\overrightarrow{BD} = k(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AD})$, 且 $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} - \frac{4}{5}\overrightarrow{CB}$, 则 $k =$ _____.
8. [2025·武汉一模] 已知在梯形 $ABCD$ 中, $\overrightarrow{BC} = 2\overrightarrow{AD}$, 若 M 为 CD 边上靠近 C 的三等分点, 且 $\overrightarrow{BM} = x\overrightarrow{AB} + y\overrightarrow{AD}$, 则 $x + y =$ _____.

微专题 1 三角恒等变换与三角函数的性质和图象

【考情分析】

三角恒等变换与三角函数的性质和图象问题是高考的重点考查内容,试题主要以客观题为主.三角恒等变换问题往往融合于求解三角函数的性质或求值中进行考查,考查内容以降幂公式、辅助角公式为主.三角函数性质的考查常常以借助图象,考查图象变换、对称性为主.高考备考中要强化记忆相关的性质、结论,并能够应用数形结合思想求解有关的问题.

微点 1 三角恒等变换

例 1 (1)[2025·全国二卷] 已知 $0 < \alpha < \pi$, $\cos \frac{\alpha}{2} = \frac{\sqrt{5}}{5}$, 则 $\sin(\alpha - \frac{\pi}{4}) =$ ()

$\frac{\sqrt{5}}{5}$, 则 $\sin(\alpha - \frac{\pi}{4}) =$ ()

- A. $\frac{\sqrt{2}}{10}$ B. $\frac{\sqrt{2}}{5}$
C. $\frac{3\sqrt{2}}{10}$ D. $\frac{7\sqrt{2}}{10}$

(2)[2023·新课标I卷] 已知 $\sin(\alpha - \beta) = \frac{1}{3}$,

$\cos \alpha \sin \beta = \frac{1}{6}$, 则 $\cos(2\alpha + 2\beta) =$ ()

- A. $\frac{7}{9}$ B. $\frac{1}{9}$ C. $-\frac{1}{9}$ D. $-\frac{7}{9}$

【规律提炼】

三角恒等变换主要解决两类问题,一是求值问题,二是三角函数式的结构变换问题.

1. 三角函数求值的类型及方法.

(1)“给角求值”:一般所给出的角都是非特殊角,注意各个角之间是否具有和差关系、互补(余)关系、倍半关系,从而选择相应的公式进行转化,把非特殊角的三角函数转化为特殊角的三角函数,进而求值.

(2)“给值求值”:已知某些角的三角函数值,求另外一些角的三角函数值,前者对应的角称为已知角,后者对应的角称为所求角,解题关键在于能够利用已知角和特殊角表示所求角,注意半角和倍角间的关系和诱导公式的应用.

2. 结构变换:审题,发现题中各个关系式的结构特点,是否为同名三角函数的积、是否存在切和弦的混合式等,根据角的关系或所求式的结构特点合理

利用相应恒等变换公式进行化简、变形,若求解有关的三角函数的性质问题,则一般要进行“降幂”,进而应用辅助角公式将其转化为 $y = A \sin(\omega x + \varphi)$ 的形式进行求解.

【巩固训练】

1. [2024·新课标I卷] 已知 $\cos(\alpha + \beta) = m$, $\tan \alpha \tan \beta = 2$, 则 $\cos(\alpha - \beta) =$ ()

- A. $-3m$ B. $-\frac{m}{3}$
C. $\frac{m}{3}$ D. $3m$

2. [人教A版必修第一册P230习题5.5-18改编] 已知以下三个式子的值等于同一个常数:

$\sin^2 30^\circ + \cos^2 60^\circ + \sin 30^\circ \cos 60^\circ;$

$\sin^2 20^\circ + \cos^2 50^\circ + \sin 20^\circ \cos 50^\circ;$

$\sin^2 15^\circ + \cos^2 45^\circ + \sin 15^\circ \cos 45^\circ.$

(1)试从三个式子中选择一个,求出这个常数;

(2)分析上述各式的共同特点,写出能反映一般规律的等式;

(3)证明(2)得到的结论.

微点2 三角函数的性质与图象

考向1 三角函数图象的变换

例2 (1)为了得到函数 $f(x)=\cos 2x$ 的图象,可以把函数 $g(x)=\sin\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)$ 的图象 ()

A. 向左平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位长度

B. 向右平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位长度

C. 向左平移 $\frac{\pi}{3}$ 个单位长度

D. 向右平移 $\frac{\pi}{3}$ 个单位长度

(2)(多选题)[2025·甘肃白银二模] 已知函数

$$f(x)=\frac{\sqrt{3}}{2}\cos 2x-\frac{1}{2}\sin 2x, \text{ 将函数 } f(x) \text{ 的图象向}$$

左平移 $\frac{\pi}{4}$ 个单位长度后得到函数 $g(x)$ 的图象,则

()

A. $g(x)=\sin\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)$

B. $g(x)$ 的图象关于直线 $x=\frac{\pi}{6}$ 对称

C. $g(x)$ 在区间 $\left[\frac{2\pi}{3}, \frac{7\pi}{6}\right]$ 上单调递减

D. $f(x)$ 与 $g(x)$ 的图象关于直线 $x=\frac{\pi}{6}$ 对称

【规律提炼】

三角函数图象的变换问题要注意三点:

(1)要明确是由哪个函数图象变换得到哪个函数图象,尤其要注意函数是否同名,若不同名常常应用诱导公式进行三角函数名的统一;

(2)要注意“ ω ”是否为1,若不为1,则将 ω 提出后再确定左右平移量;

(3)要注意无论是平移变换还是伸缩变换均与“ x ”直接接触,即伸缩变换与 ω 有关,不影响 φ ,而且要注意当 $|\omega|>1$ 时,纵坐标不变,横坐标缩短为原来的 $\frac{1}{|\omega|}$,当 $0<|\omega|<1$ 时,纵坐标不变,横坐标伸长为原来的 $\frac{1}{|\omega|}$ 倍.

考向2 三角函数的性质及其应用

例3 (1)(多选题)[2024·新课标II卷] 对于函数

$$f(x)=\sin 2x \text{ 和 } g(x)=\sin\left(2x-\frac{\pi}{4}\right), \text{ 下列说法正}$$

确的有 ()

A. $f(x)$ 与 $g(x)$ 有相同的零点

B. $f(x)$ 与 $g(x)$ 有相同的最大值

C. $f(x)$ 与 $g(x)$ 有相同的最小正周期

D. $f(x)$ 与 $g(x)$ 的图象有相同的对称轴

(2)(多选题)[2025·昆明三模] 已知函数 $f(x)=$

$$2\sin x(\sin x+\cos x)-1, \text{ 则下列说法正确的是}$$

()

A. $f(x)$ 在 $\left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right]$ 上的取值范围为 $[-1, 1]$

B. 直线 $x=\frac{3\pi}{8}$ 是 $f(x)$ 图象的一条对称轴

C. 将 $f(x)$ 图象上的所有点向右平移 $\frac{\pi}{8}$ 个单位长

度后,得到的函数图象关于 y 轴对称

D. $f(x)$ 在区间 $[0, 2\pi]$ 上有 6 个零点

【规律提炼】

求解三角函数的性质问题常常注意三个方面:

(1)数形结合,图象是函数性质的直观体现,有些性质借助图象更直观,易于求解;

(2)函数的解析式要变换成 $f(x)=A\sin(\omega x+\varphi)$ 的形式,具体问题中一般要应用三角恒等变换公式,将函数解析式进行变形;

(3)整体思想的应用,往往要将 $\omega x+\varphi$ 作为一个整体,进而求解 x 的相应范围或值,求解相应性质问题,同时要对相关基础性质进行强记,准确应用.

考向3 图象与性质的综合应用

例4 (1)[2024·新课标I卷] 当 $x\in[0, 2\pi]$ 时,曲线

$$y=\sin x \text{ 与 } y=2\sin\left(3x-\frac{\pi}{6}\right) \text{ 的交点个数为 ()}$$

A. 3

B. 4

C. 6

D. 8

(2)(多选题)[2025·福州模拟] 函数 $f(x)=$

$$A\sin(\omega x+\varphi) (A>0, \omega>0, |\varphi|<\frac{\pi}{2}) \text{ 的部分图象如}$$

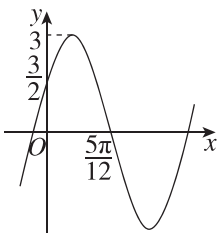
图所示,则 ()

A. $f(x)$ 的图象关于直线 $x = -\frac{4\pi}{3}$ 对称

B. $f(x)$ 的图象向左平移 $\frac{\pi}{3}$ 个单位长度后得到函数 $g(x) = 3\cos 2x$ 的图象

C. 函数 $y = f(\frac{\pi}{12} - x)$ 的单调递增区间为 $[\frac{5\pi}{12} + k\pi, \frac{11\pi}{12} + k\pi], k \in \mathbf{Z}$

D. 若方程 $f(x) = \frac{3}{2}$ 在 $(0, m)$ 上有且只有 6 个根, 则 $m \in (3\pi, \frac{10\pi}{3}]$



【规律提炼】

三角函数的图象与性质的综合问题一般会涉及零点(交点)、方程、不等式、对称性、周期性、单调性等,解决问题的关键是:

(1)根据图象能够分析有关的性质,确定函数的解析式,函数 $f(x) = A\sin(\omega x + \varphi)$ 中, A 与函数的最值有关, ω 与函数的最小正周期有关, φ 与“五点法”作图有关;

(2)能够利用图象变换或者“五点法”作图,作出相应的函数图象,进而数形结合求解有关的交点、零点等问题.

【巩固训练】

1. [2025 · 四川攀枝花模拟] 已知函数 $f(x) = 2\sin(\omega x + \frac{5\pi}{6}) (\omega > 0)$ 的部分图象如图所示,则下列说法中不正确的个数为 ()

①函数 $f(x)$ 的图象关于点

$(\frac{7\pi}{12}, 0)$ 成中心对称图形;

②函数 $f(x)$ 的单调递增区

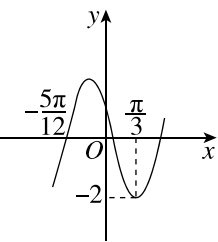
间为 $[k\pi - \frac{2\pi}{3}, k\pi - \frac{\pi}{6}],$

$k \in \mathbf{Z};$

③函数 $f(x)$ 的图象可由 $y = 2\sin \omega x$ 的图象向左平移 $\frac{5\pi}{12}$ 个单位长度得到;

④若函数 $g(x) = f(tx)$ 在 $(0, \pi)$ 上有 2 个零点,则非零实数 t 的取值范围为 $(\frac{7}{6}, \frac{13}{6}]$.

A. 0 B. 1 C. 2 D. 3



2. 将函数 $f(x) = \cos 2x$ 图象上的点 $P(m, \frac{1}{2})$ 向右平移 $t (t > 0)$ 个单位长度后得到点 Q ,若点 Q 仍在函数 $f(x)$ 的图象上,则 t 的最小值为 ()

A. $\frac{\pi}{6}$ B. $\frac{\pi}{3}$ C. $\frac{2\pi}{3}$ D. $\frac{4\pi}{3}$

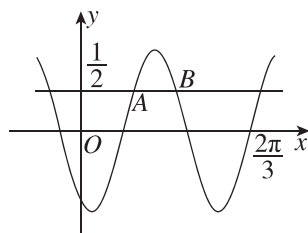
微点 3 求解参数值或范围问题

例 5 (1) 已知函数 $f(x)$ 满足 $f(2x + \frac{\pi}{3}) = 2\cos(x + \varphi)$,若函数 $f(x)$ 为奇函数,且函数 $f(x)$ 在区间 $[-m, m]$ 上单调,则实数 m 的取值范围为 ()

A. $(0, \pi]$ B. $(0, \frac{3\pi}{4}]$

C. $(0, \frac{\pi}{2}]$ D. $(0, \frac{\pi}{4}]$

(2)[2023 · 新课标II卷] 已知函数 $f(x) = \sin(\omega x + \varphi)$,如图, A, B 是直线 $y = \frac{1}{2}$ 与曲线 $y = f(x)$ 的两个交点,若 $|AB| = \frac{\pi}{6}$,则 $f(\pi) =$ _____.



【规律提炼】

求解函数 $f(x) = A\sin(\omega x + \varphi)$ 中的参数要注意:

(1)求解 φ 值主要是应用赋值法,一般是应用作图的五个关键点,或者应用函数的奇偶性,若 φ 没有明确的范围限制,则其值要表示为“ $+k\pi (k \in \mathbf{Z})$ ”的形式;

(2)求解 ω 的值一般与周期性、对称性、单调性、零点等有关,经常应用整体代换的方法与正、余弦的性质综合应用进行求解;

(3)其他的参数问题主要是应用三角函数的性质,结合函数图象合理建立方程或不等式组进行求解.

【巩固训练】

函数 $f(x) = 2\sin(\omega x + \frac{\pi}{6}) (\omega > 0)$ 的图象最近

两条对称轴之间的距离为 $\frac{\pi}{2}$,若该函数图象关

于点 $(m, 0)$ 成中心对称图形,则当 $m \in [0, \frac{\pi}{2}]$

时, m 的值为 ()

A. $\frac{\pi}{6}$ B. $\frac{\pi}{4}$ C. $\frac{\pi}{3}$ D. $\frac{5\pi}{12}$

品 点拨1 ω 的范围与最值问题

点拨1 与对称性有关的问题

例1 (1)[2025·山东烟台三模] 若函数 $f(x) = \sin(\omega x + \frac{\pi}{6})$ ($0 < \omega < 2$) 图象的一个对称中心为 $(\frac{\pi}{2}, 0)$, 则 ω 的值为 ()

- A. $\frac{2}{3}$ B. $\frac{3}{4}$ C. 1 D. $\frac{5}{3}$

(2)[2022·新高考全国I卷] 记函数 $f(x) = \sin(\omega x + \frac{\pi}{4}) + b$ ($\omega > 0$) 的最小正周期为 T , 若 $\frac{2\pi}{3} < T < \pi$, 且 $y = f(x)$ 的图象关于点 $(\frac{3\pi}{2}, 2)$ 中心对称, 则 $f(\frac{\pi}{2}) =$ ()

- A. 1 B. $\frac{3}{2}$
C. $\frac{5}{2}$ D. 3

【技巧点拨】

求解与对称性有关的问题, 主要是应用整体代换的方法, 令 $\omega x + \varphi = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbf{Z}$ 或 $\omega x + \varphi = k\pi, k \in \mathbf{Z}$, 进而求解参数的值.

点拨2 与单调性有关的问题

例2 (1)[2025·辽宁辽阳二模] 已知函数 $f(x) = \cos(\omega x + \frac{\pi}{6})$ ($\omega > 0$) 在区间 $(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2})$ 上单调, 则 ω 的取值范围为 ()

- A. $(\frac{5}{9}, 1)$ B. $[\frac{5}{9}, 1)$
C. $(0, \frac{5}{9})$ D. $(0, \frac{5}{9}]$

(2)已知函数 $f(x) = |\tan(\omega x + \varphi)|$ ($\omega > 0, 0 < \varphi < \frac{\pi}{2}$) 的最小正周期为 2π , 直线 $x = \frac{\pi}{3}$ 是 $f(x)$ 图象的一条对称轴, 则 $f(x)$ 的单调递减区间为 ()

- A. $(2k\pi - \frac{\pi}{6}, 2k\pi + \frac{5\pi}{6}) (k \in \mathbf{Z})$
B. $(2k\pi - \frac{5\pi}{3}, 2k\pi - \frac{2\pi}{3}) (k \in \mathbf{Z})$
C. $(2k\pi - \frac{4\pi}{3}, 2k\pi - \frac{\pi}{3}) (k \in \mathbf{Z})$
D. $(2k\pi - \frac{\pi}{3}, 2k\pi + \frac{2\pi}{3}) (k \in \mathbf{Z})$

【技巧点拨】

若三角函数在区间 $[m, n]$ 上单调, 则有两种思考方向: 一是满足 $\frac{T}{2} \geq n - m$, 可求得参数的范围; 二是借助整体思想, 由题意可得 $m\omega + \varphi \leq \omega x + \varphi \leq n\omega + \varphi$, 则其范围是正弦函数(余弦函数)单调区间的子集, 进而求解不等式, 得到参数的范围.

点拨3 与函数零点有关的问题

例3 (1)[2025·浙江杭州三模] 若函数 $f(x) = 2\cos(\omega x + \varphi)$ ($\omega > 0, 0 < \varphi < \frac{\pi}{2}$) 的最小正周期为 π , 其图象的一条对称轴的方程为 $x = \frac{\pi}{3}$, 则函数 $f(x)$ 在 $[-\pi, \pi]$ 上的零点个数为 ()

A. 1 B. 2
C. 3 D. 4

(2)已知函数 $f(x) = \sin(\pi - \omega x) + \sqrt{3} \sin(\frac{\pi}{2} + \omega x)$ ($\omega > 0$), 若 $f(x)$ 在区间 $(\frac{\pi}{3}, \pi)$ 内无零点, 则 ω 的取值范围为_____.

【技巧点拨】

若函数在指定区间内没有零点, 则其求解的关键是: 应用整体思想, 对应的所给区间是两个相邻的零点所构成的区间的子集, 注意区间是否取等. 另

外要注意解不等式时, 例如 $\begin{cases} \omega \geq 3k - 1, \\ \omega \leq k + \frac{2}{3}, \end{cases}$ 对 k 的取值

要进行分类讨论, 在满足不等式的解集不为空集的情况下, ω 最后的结果取并集.

微专题2 平面向量及其应用

【考情分析】

平面向量为高考中的常考内容. 高考中以考查平面向量数量积的运算及其应用为主, 具体内容涉及求解模长、夹角、参数和求值问题. 试题主要以选择题或填空题的形式考查, 难度不大. 备考中要熟练掌握平面向量数量积的定义式, 坐标运算公式, 而且能够应用向量的“数形结合”特性, 应用坐标法求解相应的难题.

微点1 平面向量的模与夹角

例1 (1)[2024·新课标Ⅱ卷] 已知向量 $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ 满足 $|\mathbf{a}|=1, |\mathbf{a}+2\mathbf{b}|=2$, 且 $(\mathbf{b}-2\mathbf{a}) \perp \mathbf{b}$, 则 $|\mathbf{b}|=$ ()

- A. $\frac{1}{2}$ B. $\frac{\sqrt{2}}{2}$ C. $\frac{\sqrt{3}}{2}$ D. 1

(2)[2023·全国甲卷] 已知向量 $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ 满足 $|\mathbf{a}|=|\mathbf{b}|=1, |\mathbf{c}|=\sqrt{2}$, 且 $\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c}=\mathbf{0}$, 则 $\cos\langle \mathbf{a}-\mathbf{c}, \mathbf{b}-\mathbf{c} \rangle=$ ()

- A. $-\frac{4}{5}$ B. $-\frac{2}{5}$ C. $\frac{2}{5}$ D. $\frac{4}{5}$

【规律提炼】

向量夹角和模长问题的求解策略:

- (1) 根据夹角公式和模长公式, 其中求解两个向量的数量积是关键, 具体问题中可以通过对等式平方或者坐标运算而得到数量积;
- (2) 若向量之间存在垂直关系, 则可通过建立平面直角坐标系的方法, 将问题转化为向量的坐标运算, 应用代数方法求解与模或夹角有关的最值或范围问题.

【巩固训练】

1. [2025·甘肃白银二模] 已知 $|\mathbf{a}|=\sqrt{2}, |\mathbf{b}|=1$, 若 $(\mathbf{a}+2\mathbf{b}) \perp \mathbf{a}$, 则 $\cos\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle=$ ()

- A. $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ B. $\frac{\sqrt{2}}{2}$
C. $-\frac{1}{2}$ D. $\frac{1}{2}$

2. [2025·北京卷] 已知平面直角坐标系 xOy 中, $|\overrightarrow{OA}|=|\overrightarrow{OB}|=\sqrt{2}, |\overrightarrow{AB}|=2$, 设 $C(3,4)$, 则 $|2\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AB}|$ 的取值范围是 ()

- A. $[6,14]$ B. $[6,12]$
C. $[8,14]$ D. $[8,12]$

微点2 平面向量的数量积

例2 (1)[2023·全国乙卷] 正方形 $ABCD$ 的边长是 2, E 是 AB 的中点, 则 $\overrightarrow{EC} \cdot \overrightarrow{ED}=$ ()

- A. $\sqrt{5}$ B. 3 C. $2\sqrt{5}$ D. 5

(2) 已知向量 $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ 均为单位向量, 且 $\mathbf{a}+3\mathbf{b}+2\mathbf{c}=\mathbf{0}$, 则 $\mathbf{a} \cdot (2\mathbf{b}-\mathbf{c})=$ ()

- A. 0 B. -1
C. 2 D. -3

【规律提炼】

向量数量积求值及范围问题的求解策略:

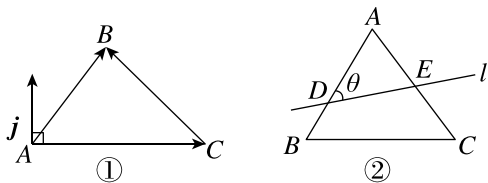
- (1) 求解两个向量的数量积常常都是通过平方、多项式乘法、数量积公式等进行求解的;
- (2) 求解两个向量的数量积的范围问题, 常常应用均值不等式或者三角函数、函数思想等进行求解;
- (3) 若向量存在垂直关系或者明确夹角, 则可根据条件建立平面直角坐标系, 进而通过坐标运算, 再应用解析几何或函数方法进行求解.

【巩固训练】

1. [2025·北京海淀区三模] 已知 $\triangle ABC$ 为等腰直角三角形, C 为直角, 直角边长为 2, 点 P 在 $\triangle ABC$ 所在平面上, 向量 $\overrightarrow{AP}$ 为单位向量, 点 D 满足 $\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{DP}$, 则 $\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{BD}$ 的最大值为 ()

- A. 4 B. $3\sqrt{2}$
C. 5 D. 6

2. [人教A版必修第二册 P62 复习参考题 6-19 改编] 用向量方法推导正弦定理采取如下操作: 如图①, 在锐角三角形 ABC 中, 过点 A 作与 $\overrightarrow{AC}$ 垂直的单位向量 $\mathbf{j}$, 因为 $\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{AB}$, 所以 $\mathbf{j} \cdot (\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CB})=\mathbf{j} \cdot \overrightarrow{AB}$, 由分配律得 $\mathbf{j} \cdot \overrightarrow{AC}+\mathbf{j} \cdot \overrightarrow{CB}=\mathbf{j} \cdot \overrightarrow{AB}$, 即 $|\mathbf{j}| |\overrightarrow{AC}| \cos \frac{\pi}{2} + |\mathbf{j}| |\overrightarrow{CB}| \cos(\frac{\pi}{2}-C)=|\mathbf{j}| |\overrightarrow{AB}| \cos(\frac{\pi}{2}-A)$, 即 $a \sin C=c \sin A$. 请用上述向量方法探究: 如图②, 直线 l 与 $\triangle ABC$ 的边 AB, AC 分别相交于点 D, E , 设 $AB=c, BC=a, CA=b, \angle ADE=\theta$, 求 θ 与 $\triangle ABC$ 的边和角之间的等量关系.



微点3 参数的取值

例3 (1)[2024·全国甲卷] 设向量 $\mathbf{a}=(x+1, x)$, $\mathbf{b}=(x, 2)$, 则 ()

- A. $x=-3$ 是 $\mathbf{a} \perp \mathbf{b}$ 的必要条件
- B. $x=-3$ 是 $\mathbf{a} // \mathbf{b}$ 的必要条件
- C. $x=0$ 是 $\mathbf{a} \perp \mathbf{b}$ 的充分条件
- D. $x=-1+\sqrt{3}$ 是 $\mathbf{a} // \mathbf{b}$ 的充分条件

(2)[2025·甘肃甘南模拟] 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, $\overrightarrow{BM}=2\overrightarrow{MC}$, N 为线段 AM 上一点, 且 $\overrightarrow{AN}=(1-\lambda)\overrightarrow{AB}+\frac{\lambda}{3}\overrightarrow{AC}$, 则实数 λ 的值为 ()

- A. $\frac{3}{4}$
- B. $\frac{2}{5}$
- C. $\frac{5}{6}$
- D. $\frac{6}{7}$

【规律提炼】

向量中参数的范围问题的求解策略:

- (1)若已知条件与模长、夹角、数量积、位置关系等有关, 则常常应用坐标运算得到关于参数的方程, 进而求解;
- (2)若已知条件与基底有关, 则常常应用平面向量基本定理, 根据向量线性表示的唯一性进行求解.

【巩固训练】

1. [2025·北京大兴区三模] 已知平面向量 $\mathbf{a}=(1, 2)$, $\mathbf{b}=(2, m)$, 若 $(\mathbf{a}+\mathbf{b}) \perp (\mathbf{a}-\mathbf{b})$, 则实数 $m=$ ()
 A. -1 B. 1
 C. -1 或 1 D. 4
2. [2025·海口模拟] 已知向量 $\mathbf{a}=(2, -\lambda)$, $\mathbf{b}=(-1, \lambda-2)$, $\mathbf{c}=(1, 2)$, 且 $(\mathbf{a}-\mathbf{b}) // \mathbf{c}$, 则实数 $\lambda=$ ()
 A. -4 B. -2 C. 2 D. 4

微专题3 解三角形

【考情分析】

解三角形是高考中的必考内容, 试题主要以应用正弦定理、余弦定理求解三角形的面积、周长等问题为主, 也会涉及角平分线、中线、定比分线等内容. 试题常常与均值不等式、三角恒等变换、向量、三角函数等知识综合考查. 试题主要以解答题的形式考查. 高考备考中不仅要熟练掌握与面积、周长有关的常见题型的通解通法, 还要充分掌握正弦定理、余弦定理应用条件, 并能够准确应用均值不等式和三角函数的有界性求解有关的范围、最值问题, 注重培养学生发散思维, 提升数学运算核心素养.

微点1 正弦定理、余弦定理的应用

例1 [2025·天津卷] 在 $\triangle ABC$ 中, 内角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c . 已知 $a \sin B = \sqrt{3} b \cos A$, $c - 2b = 1$, $a = \sqrt{7}$.

(1)求 A 的值;

(2)求 c 的值;

(3)求 $\sin(A+2B)$ 的值.

【规律提炼】

利用正弦定理和余弦定理理解三角形的策略:

(1) 正弦定理可实现边与角正弦的互化, 当题中存在关于边或角正弦的齐次等式或分式时, 可直接应用正弦定理进行边与角正弦的互化, 一定要注意必须是“齐次”的等式或分式方可实现互化.

(2) 余弦定理主要可实现边的平方与角余弦之间的互化, 当题中存在边的平方时一般都是应用余弦定理将其转化为角的余弦, 注意余弦定理的两种形式:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A \text{ 和 } \cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$$

(仅举一例).

(3) 应用正弦定理和余弦定理理解三角形时, 要根据条件合理利用三角形的内角和定理进行有关角的转换, 尤其条件等式中三角形的三个内角都出现时, 一般都会应用内角和定理进行消角, 即“三角齐出, 必减角”. 具体问题中也要能够准确应用三角恒等变换进行有关角之间的转换.

【巩固训练】

[2025 · 河南信阳模拟] 在 $\triangle ABC$ 中, 内角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c .

(1) 若 $\triangle ABC$ 为锐角三角形, $C = 2A, a = 2$, 求 c 的取值范围;

(2) 若 $a^2 + \frac{1}{2}b^2 = c^2$, 求证: $\tan C = 3\tan A$.

微点 2 求解三角形的面积和周长问题

考向 1 求解三角形的面积、周长

例 2 [2024 · 新课标Ⅱ卷] 记 $\triangle ABC$ 的内角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c , 已知 $\sin A + \sqrt{3} \cos A = 2$.

(1) 求 A ;

(2) 若 $a = 2, \sqrt{2}b \sin C = c \sin 2B$, 求 $\triangle ABC$ 的周长.

例 3 [2022 · 新高考全国Ⅱ卷] 记 $\triangle ABC$ 的内角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c , 以 a, b, c 为边长的三个正三角形的面积分别为 S_1, S_2, S_3 , 且 $S_1 - S_2 +$

$$S_3 = \frac{\sqrt{3}}{2}, \sin B = \frac{1}{3}.$$

(1) 求 $\triangle ABC$ 的面积;

(2) 若 $\sin A \sin C = \frac{\sqrt{2}}{3}$, 求 b .

